

トラップ Bose-Einstein 凝縮体の 集団励起の非線形効果

大 矢 正 人*

Nonlinear Effects of Collective Excitation of a Trapped Bose-Einstein Condensate

Masato OHYA

We present the theory of large amplitude oscillations of a trapped Bose-Einstein condensate at zero temperature. The nonlinear effects give rise to frequency shift, mode coupling and harmonic generation of oscillations. We provide the analytic expression for the frequency shift and numerical results for the collective modes, and show that a strong enhancement of nonlinear effects is obtained not only by increasing the strength of the driving force, but also by changing the anisotropy of the trap.

第1章 序 論

磁気光学トラップ気体の Bose-Einstein 凝縮 (BEC) の成功¹⁾²⁾³⁾後直ちに, BE 凝縮体の集団励起に関する実験⁴⁾⁵⁾が行われた。集団励起に関する理論的研究は Thomas-Fermi 近似を使った Gross-Pitaevskii 方程式に基づく平均場理論⁶⁾⁷⁾⁸⁾によって行われ, 平均場理論の線形近似で求めた固有モード周波数は実験結果とよい一致を示した。本論文は Thomas-Fermi 近似での平均場理論をもとに, 振動振幅が大きくなり非線形効果が生じた場合の集団励起を研究することを目的とする。

トラップ BE 凝縮体の形および集団励起を考える上で重要なスケールは, 凝縮体の大きさ R , 原子の零点振動の振幅 a_0 , コヒーレント長さ ξ , 原子間相互作用を決める散乱長 a である。閉じ込め

ポテンシャル $V(r)$ を調和振動子型 $\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ とした時, a_0 は $(\hbar/m\omega)^{1/2}$ で与えられる。相互作用の強さ U_0 は散乱長 a を使い, $4\pi\hbar^2 a/m$ となる。ここで m は原子の質量である。凝縮体密度を n_0 とすると, ξ は運動エネルギー $\hbar^2/2m\xi^2$ と相互作用エネルギー $n_0 U_0$ が等しい時の長さとして定義され, $(8\pi a n_0)^{-1/2}$ である。実験で調べたトラップ BE 気体は次の条件を満足している。

$$a \ll a_0, \quad n_0 a^3 \ll 1. \quad (1.1)$$

ここで第2式は希薄気体の条件である。

次に重要なパラメータとして, 閉じ込めポテンシャルによる束縛準位のエネルギー間隔に対する粒子あたりの平均相互作用エネルギーの比 η を導入する。

$$\eta = \frac{n_0 U_0}{\hbar \omega}. \quad (1.2)$$

* 電気電子情報工学科教授
1999年11月30日受付

$\eta \ll 1$ の場合, 原子間相互作用の効果は無視でき, 凝縮体の形は閉じ込めポテンシャル中の原子の基底状態の波動関数により決まる。そこで凝縮体の大きさ R は零点振動の振幅 a_0 のオーダーとなる。凝縮原子数を N とすると, $n_0 \approx N/(4\pi a_0^3/3)$ であり, $\eta \ll 1$ の条件つまり $4\pi n_0 a_0^3 \ll 1$ を使うと, N の範囲は

$$N \ll \frac{a_0}{a} \quad (1.3)$$

となる。一方 $\eta \gg 1$ の場合, 束縛エネルギー準位の不連続構造は重要でなくなる。凝縮体の形 $\phi(r)$ は GP 方程式の運動エネルギーの寄与を無視 (Thomas-Fermi 近似) して求め, 閉じ込めポテンシャル $V(r)$ の形を反映したものとなる。

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \{[\mu - V(r)]/U_0\}^{1/2} \\ &= n_{0\max}^{1/2} (1 - r^2/2a_0^2\eta)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

ここで μ は化学ポテンシャル, $n_{0\max} = \mu/U_0$ である。凝縮体の大きさ R は $a_0(2\eta)^{1/2}$ であり, a_0, a, N を使って η を表わすと, $(3aN/a_0)^{2/5}$ となる。この場合 N に対する条件は次となる。

$$N \gg \frac{a_0}{a}. \quad (1.5)$$

以上の結果, $N \ll a_0/a$ の場合は凝縮体の形は閉じ込めポテンシャル中の原子の基底状態の波動関数により決まり, 凝縮粒子数が増加し $N \gg a_0/a$ となる場合は (1.4) で示された形になることが分かる。本論文は Thomas-Fermi 近似が成り立つ $N \gg a_0/a$ の場合の凝縮体の変形振動を考える。この場合前に述べたスケール R, a, ξ, a_0 の関係は次となる。

$$R \gg a_0 \gg \xi \gg a. \quad (1.6)$$

閉じ込めポテンシャルが軸対称の場合, 半径方向のみの振動モード (ω_2 モード), 半径方向と軸方向が反位相で振動するモード (ω_- モード), 半径方向と軸方向が同位相で振動するモード (ω_+ モード) の 3 種類の振動モードが存在する。振動の振幅が小さく, 線形近似が成り立つ場合, 3 つの振動モードは独立であるが, 振幅が大きくなると非線形効果により, モード周波数シフト, 高調波発

生, モード結合などが生じる。本論文ではこれらの非線形効果を Dalfovo ら⁹⁾の方法に基づき, 解析計算および数値計算で求める。

第 2 章では, 調和振動子型閉じ込めポテンシャル中の BE 凝縮体の変形振動の運動方程式を求める。第 3 章では, 非線形項によるモード周波数シフトを ω_2 モードと ω_- モードの場合に解析計算で求める。第 4 章では, 駆動された BE 凝縮体の変形振動の数値計算を行い, 非線形効果を調べる。第 5 章は, 本論文の結果をまとめ, 今後の課題を示す。

第 2 章 トラップ BE 凝縮体の運動方程式

本章では, 閉じ込めポテンシャル $V(\vec{r})$ によってトラップされた絶対零度での BE 凝縮体の運動方程式を求める。Bose 粒子の原子間相互作用を斥力デルタ型 $U(r) = U_0\delta(r)$ ($U_0 > 0$) とし, 凝縮体のマクロな波動関数 $\phi(\vec{r}, t)$ は次の Gross-Pitaevskii 方程式に従うとする。

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + V(\vec{r})\phi + U_0 |\phi|^2 \phi. \quad (2.1)$$

ここで m は原子質量, $U_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$ (a は散乱長) である。閉じ込めポテンシャル $V(\vec{r})$ は, 次の調和振動子型ポテンシャルとする。

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (\lambda_x^2 x^2 + \lambda_y^2 y^2 + \lambda_z^2 z^2). \quad (2.2)$$

ここで λ_i ($i=x, y, z$) は閉じ込めポテンシャルの非等方性を示す定数である。 ϕ に対する規格化条件は

$$\int d\vec{r} |\phi(\vec{r})|^2 = N \quad (2.3)$$

であり, N は凝縮原子数である。

BE 凝縮体の変形振動を考えるため, スケールパラメータ $b_i(t)$ ($i=x, y, z$)¹⁰⁾を導入して座標 r_i を $R_i = r_i/b_i(t)$ に変換し, マクロな波動関数を次のように表現する。

$$\phi(\vec{r}, t) = \nu^{-1/2}(t) [\bar{\rho}(\vec{R})/m]^{1/2} \exp[iS(\vec{r}, t)/m]. \quad (2.4)$$

ここで $\nu(t) = \prod_i b_i(t)$ である。以前の論文¹¹⁾で示し

たように, $b_i(t)$ ($i=x, y, z$) に対する方程式は次となる。

$$\frac{d^2 b_i}{dt^2} + \lambda_i^2 \omega_0^2 b_i = \frac{P_i}{b_i^3} + \frac{Q}{\nu(t) b_i}. \quad (2.5)$$

ここで P_i, Q は定数であり, 右辺の第 1 項は運動エネルギーからの寄与, 第 2 項は原子間相互作用からの寄与を与える。本論文は第 1 項を無視する Thomas-Fermi 近似の場合を考える。また, 閉じ込めポテンシャルは軸対称型 ($\lambda_x = \lambda_y = 1, \lambda_z = \lambda$) とする。

平衡値のまわりでの変形振動を考えるため, 最初に $b_i(t)$ ($i=x, y, z$) の平衡値を求める。 b_x, b_y, b_z のそれぞれの平衡値を b_0, b_0, b_{0z} とおくと, (2.5) より

$$\omega_0^2 b_0 = \frac{Q}{b_0^3 b_{0z}}, \quad (2.6)$$

$$\lambda^2 \omega_0^2 b_{0z} = \frac{Q}{b_0^2 b_{0z}^2} \quad (2.7)$$

の関係が成り立つ。簡単のために, 次のようにスケールすると,

$$\frac{b_x}{b_0} \rightarrow b_x, \quad \frac{b_y}{b_0} \rightarrow b_y, \quad \frac{b_z}{b_{0z}} \rightarrow b_z, \quad (2.8)$$

平衡値は 1 となり, (2.5) は次となる。

$$\frac{d^2 b_x}{dt^2} + \omega_0^2 b_x = \omega_0^2 \frac{1}{b_x^2 b_y b_z}, \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2 b_y}{dt^2} + \omega_0^2 b_y = \omega_0^2 \frac{1}{b_x b_y^2 b_z}, \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2 b_z}{dt^2} + \lambda^2 \omega_0^2 b_z = \lambda^2 \omega_0^2 \frac{1}{b_x b_y b_z^2}. \quad (2.11)$$

平衡値からのずれを $\delta b_x, \delta b_y, \delta b_z$ とおき,

$$b_x = 1 + \delta b_x, \quad (2.12)$$

$$b_y = 1 + \delta b_y, \quad (2.13)$$

$$b_z = 1 + \delta b_z, \quad (2.14)$$

(2.9) (2.10) (2.11) に代入する。 $\delta b_x, \delta b_y, \delta b_z$ で展開し 4 次以上の項を無視すると, $\delta b_x, \delta b_y, \delta b_z$ に対する方程式は次となる。

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \delta b_x + \omega_0^2 \delta b_x \\ &= \omega_0^2 \{ 2(-\delta b_x) + (-\delta b_y) + (-\delta b_z) \\ & \quad + 3(-\delta b_x)^2 + (-\delta b_y)^2 + (-\delta b_z)^2 \\ & \quad + 2(-\delta b_x)(-\delta b_y) + 2(-\delta b_x)(-\delta b_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (-\delta b_y)(-\delta b_z) \\ & + 4(-\delta b_x)^3 + (-\delta b_y)^3 + (-\delta b_z)^3 \\ & + 3(-\delta b_x)^2(-\delta b_y) + 3(-\delta b_x)^2(-\delta b_z) \\ & + 2(-\delta b_y)^2(-\delta b_x) \\ & + (-\delta b_y)^2(-\delta b_z) + 2(-\delta b_z)^2(-\delta b_x) \\ & + (-\delta b_z)^2(-\delta b_y) \\ & + 2(-\delta b_x)(-\delta b_y)(-\delta b_z) \}, \quad (2.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \delta b_y + \omega_0^2 \delta b_y \\ &= \omega_0^2 \{ (-\delta b_x) + 2(-\delta b_y) + (-\delta b_z) \\ & \quad + (-\delta b_x)^2 + 3(-\delta b_y)^2 + (-\delta b_z)^2 \\ & \quad + 2(-\delta b_x)(-\delta b_y) + (-\delta b_x)(-\delta b_z) \\ & \quad + 2(-\delta b_y)(-\delta b_z) \\ & \quad + (-\delta b_x)^3 + 4(-\delta b_y)^3 + (-\delta b_z)^3 \\ & \quad + 2(-\delta b_x)^2(-\delta b_y) + (-\delta b_x)^2(-\delta b_z) \\ & \quad + 3(-\delta b_y)^2(-\delta b_x) \\ & \quad + 3(-\delta b_y)^2(-\delta b_z) + (-\delta b_z)^2(-\delta b_x) \\ & \quad + 2(-\delta b_z)^2(-\delta b_y) \\ & \quad + 2(-\delta b_x)(-\delta b_y)(-\delta b_z) \}, \quad (2.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \delta b_z + \lambda^2 \omega_0^2 \delta b_z \\ &= \lambda^2 \omega_0^2 \{ (-\delta b_x) + (-\delta b_y) + 2(-\delta b_z) \\ & \quad + (-\delta b_x)^2 + (-\delta b_y)^2 + 3(-\delta b_z)^2 \\ & \quad + (-\delta b_x)(-\delta b_y) + 2(-\delta b_x)(-\delta b_z) \\ & \quad + 2(-\delta b_y)(-\delta b_z) \\ & \quad + (-\delta b_x)^3 + (-\delta b_y)^3 + 4(-\delta b_z)^3 \\ & \quad + (-\delta b_x)^2(-\delta b_y) + 2(-\delta b_x)^2(-\delta b_z) \\ & \quad + (-\delta b_y)^2(-\delta b_x) \\ & \quad + 2(-\delta b_y)^2(-\delta b_z) + 3(-\delta b_z)^2(-\delta b_x) \\ & \quad + 3(-\delta b_z)^2(-\delta b_y) \\ & \quad + 2(-\delta b_x)(-\delta b_y)(-\delta b_z) \}. \quad (2.17) \end{aligned}$$

(2.15) (2.16) (2.17) を時間に関してフーリエ変換し, 線形項のみを考えて, 行列形式で表現する。

$$(A - \omega^2 1)x = 0. \quad (2.18)$$

ここで 1 は単位行列, x, A はそれぞれ次である。

$$x = \begin{pmatrix} \delta b_x \\ \delta b_y \\ \delta b_z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3\omega_0^2 & \omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & 3\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \lambda^2 \omega_0^2 & \lambda^2 \omega_0^2 & 3\lambda^2 \omega_0^2 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

固有モード周波数 ω は次の行列式を解くことによって求めることができる。

$$|A - \omega^2 1| = 0. \quad (2.20)$$

この行列式を計算すると,

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)\{\omega^4 - (4 + 3\lambda^2)\omega_0^2\omega^2 + 10\lambda^2\omega_0^4\} = 0 \quad (2.21)$$

となり, この方程式を解くと固有モード周波数は次となる。

$$\omega_{\mp} = \sqrt{q_{\mp}} \omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{2} \omega_0. \quad (2.22)$$

ただし,

$$q_{\mp} = 2 + \frac{3}{2}\lambda^2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{9\lambda^4 - 16\lambda^2 + 16} \quad (2.23)$$

である。次に固有モード周波数 ω_{\mp}, ω_2 に対する固有ベクトル $x^{(i)} (i=1, 2, 3)$ を求め, 行列 A を対角化する行列 B を求める。

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \omega_-^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_+^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

ここで行列 B は固有ベクトル $x^{(i)} (i=1, 2, 3)$ を使って求められる。

$$B = (x^{(1)} \ x^{(2)} \ x^{(3)}). \quad (2.25)$$

$\omega^2 = q_- \omega_0^2$ に対して $Ax^{(1)} = q_- \omega_0^2 x^{(1)}$ を満足する $x^{(1)}$ を求める。

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ は次の関係式を満足する。

$$\begin{aligned} (3 - q_-)x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_3^{(1)} &= 0, \\ x_1^{(1)} + (3 - q_-)x_2^{(1)} + x_3^{(1)} &= 0, \\ \lambda^2 x_1^{(1)} + \lambda^2 x_2^{(1)} + (3\lambda^2 - q_-)x_3^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

これより $x_1^{(1)} = 1, x_2^{(1)} = 1, x_3^{(1)} = q_- - 4$ となり, $x^{(1)}$ は次となる。

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ q_- - 4 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

同様に, $\omega^2 = q_+ \omega_0^2$ に対して $Ax^{(2)} = q_+ \omega_0^2 x^{(2)}$ を満足する $x^{(2)}$ を求めると,

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ q_+ - 4 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

となり, $\omega^2 = 2\omega_0^2$ に対して $Ax^{(3)} = 2\omega_0^2 x^{(3)}$ を満足する $x^{(3)}$ を求めると,

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

となる。以上より行列 B は次となる。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ q_- - 4 & q_+ - 4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

(2.15) (2.16) (2.17) を非線形項も含めて行列形式で書くと,

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \delta b_x \\ \delta b_y \\ \delta b_z \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} \delta b_x \\ \delta b_y \\ \delta b_z \end{pmatrix} + C \quad (2.32)$$

となる。 C は $\delta b_x, \delta b_y, \delta b_z$ の 2 次と 3 次の非線形項を示す。逆行列 B^{-1} を (2.32) に左から作用すると

$$\frac{d^2}{dt^2} B^{-1} \begin{pmatrix} \delta b_x \\ \delta b_y \\ \delta b_z \end{pmatrix} = -B^{-1} A B B^{-1} \begin{pmatrix} \delta b_x \\ \delta b_y \\ \delta b_z \end{pmatrix} + B^{-1} C \quad (2.33)$$

となる。新しいベクトルとして

$$\begin{pmatrix} \xi_- \\ \xi_+ \\ \xi_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} \delta b_x \\ \delta b_y \\ \delta b_z \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

を導入すると, (2.33) は

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \xi_- \\ \xi_+ \\ \xi_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \omega_-^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_+^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_- \\ \xi_+ \\ \xi_2 \end{pmatrix} + B^{-1} C \quad (2.35)$$

となる。逆行列 B^{-1} を計算すると次となる。

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{q_+ - 4}{2(q_+ - q_-)} & \frac{q_+ - 4}{2(q_+ - q_-)} & -\frac{2}{2(q_+ - q_-)} \\ -\frac{q_- - 4}{2(q_+ - q_-)} & -\frac{q_- - 4}{2(q_+ - q_-)} & \frac{2}{2(q_+ - q_-)} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

これより ξ_-, ξ_+, ξ_2 は $\delta b_x, \delta b_y, \delta b_z$ を使って次の

ように表現される。

$$\begin{aligned}\xi_- &= \frac{q_+ - 4}{2(q_+ - q_-)} \delta b_x + \frac{q_+ - 4}{2(q_+ - q_-)} \delta b_y - \frac{2}{2(q_+ - q_-)} \delta b_z, \\ \xi_+ &= \frac{q_- - 4}{2(q_+ - q_-)} \delta b_x - \frac{q_- - 4}{2(q_+ - q_-)} \delta b_y + \frac{2}{2(q_+ - q_-)} \delta b_z, \\ \xi_2 &= \frac{1}{2} \delta b_x - \frac{1}{2} \delta b_y.\end{aligned}\quad (2.37)$$

C を $(C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)})^T$ と書き, $\delta b_x, \delta b_y, \delta b_z$ を次のように ξ_-, ξ_+, ξ_2 で表現すると,

$$\begin{aligned}\delta b_x &= \xi_- + \xi_+ + \xi_2, \\ \delta b_y &= \xi_- + \xi_+ - \xi_2, \\ \delta b_z &= (q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+, \end{aligned}\quad (2.38)$$

$C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}$ はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}C^{(1)} &= \omega_0^2 [3(\xi_- + \xi_+ + \xi_2)^2 + (\xi_- + \xi_+ - \xi_2)^2 \\ &\quad + \{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}^2 + 2(\xi_- + \xi_+ + \xi_2) \\ &\quad (\xi_- + \xi_+ - \xi_2) \\ &\quad + 2(\xi_- + \xi_+ - \xi_2)\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\} \\ &\quad + (\xi_- + \xi_+ - \xi_2)\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\} \\ &\quad - 4(\xi_- + \xi_+ + \xi_2)^3 - (\xi_- + \xi_+ - \xi_2)^3 \\ &\quad - \{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}^3 - 3(\xi_- + \xi_+ + \xi_2)^2 \\ &\quad (\xi_- + \xi_+ - \xi_2) \\ &\quad - 3\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}(\xi_- + \xi_+ + \xi_2)^2 \\ &\quad - 2(\xi_- + \xi_+ + \xi_2)(\xi_- + \xi_+ - \xi_2)^2 \\ &\quad - \{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}(\xi_- + \xi_+ - \xi_2)^2 \\ &\quad - 2\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}^2(\xi_- + \xi_+ + \xi_2) \\ &\quad - \{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}^2(\xi_- + \xi_+ - \xi_2) \\ &\quad - 2\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}(\xi_- + \xi_+ + \xi_2) \\ &\quad (\xi_- + \xi_+ - \xi_2)], \end{aligned}\quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}C^{(2)} &= \omega_0^2 [(\xi_- + \xi_+ + \xi_2)^2 + 3(\xi_- + \xi_+ - \xi_2)^2 \\ &\quad + \{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}^2 + 2(\xi_- + \xi_+ - \xi_2) \\ &\quad (\xi_- + \xi_+ + \xi_2) \\ &\quad + (\xi_- + \xi_+ + \xi_2)\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\} \\ &\quad + 2(\xi_- + \xi_+ - \xi_2)\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\} \\ &\quad - (\xi_- + \xi_+ + \xi_2)^3 - 4(\xi_- + \xi_+ - \xi_2)^3 \\ &\quad - \{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}^3 - 2(\xi_- + \xi_+ + \xi_2)^2 \\ &\quad (\xi_- + \xi_+ - \xi_2) \\ &\quad - \{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}(\xi_- + \xi_+ + \xi_2)^2 \\ &\quad - 3(\xi_- + \xi_+ + \xi_2)(\xi_- + \xi_+ - \xi_2)^2 \\ &\quad - 3\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}(\xi_- + \xi_+ - \xi_2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&- \{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}^2(\xi_- + \xi_+ + \xi_2) \\ &- 2\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}^2(\xi_- + \xi_+ - \xi_2) \\ &- 2\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}(\xi_- + \xi_+ + \xi_2) \\ &(\xi_- + \xi_+ - \xi_2),\end{aligned}\quad (2.40)$$

$$\begin{aligned}C^{(3)} &= \lambda^2 \omega_0^2 [(\xi_- + \xi_+ + \xi_2)^2 + (\xi_- + \xi_+ - \xi_2)^2 \\ &\quad + 3\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}^2 + (\xi_- + \xi_+ + \xi_2) \\ &\quad (\xi_- + \xi_+ - \xi_2) \\ &\quad + 2\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}(\xi_- + \xi_+ + \xi_2) \\ &\quad + 2\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}(\xi_- + \xi_+ - \xi_2) \\ &\quad - (\xi_- + \xi_+ + \xi_2)^3 - (\xi_- + \xi_+ - \xi_2)^3 \\ &\quad - 4\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}^3 - (\xi_- + \xi_+ + \xi_2)^2 \\ &\quad (\xi_- + \xi_+ - \xi_2) \\ &\quad - 2\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}(\xi_- + \xi_+ + \xi_2)^2 \\ &\quad - (\xi_- + \xi_+ + \xi_2)(\xi_- + \xi_+ - \xi_2)^2 \\ &\quad - 2\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}(\xi_- + \xi_+ - \xi_2)^2 \\ &\quad - 3\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}^2(\xi_- + \xi_+ + \xi_2) \\ &\quad - 3\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}^2(\xi_- + \xi_+ - \xi_2) \\ &\quad - 2\{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\}(\xi_- + \xi_+ + \xi_2) \\ &\quad (\xi_- + \xi_+ - \xi_2)]. \end{aligned}\quad (2.41)$$

次に各固有モード周波数に対する振動ふるまいについて述べる。(2.23)より $q_+ > q_-$ であることは明らかである。 q_+ と q_- の値の範囲を調べる。

$$q_{\mp}(\lambda^2) = 2 + \frac{3}{2}\lambda^2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{9\lambda^4 - 16\lambda^2 + 16} \quad (2.42)$$

とすると, $\lambda^2 = 0$ の場合

$$q_-(0) = 0, \quad q_+(0) = 4 \quad (2.43)$$

である。

$$\frac{dq_{\mp}(\lambda^2)}{d\lambda^2} = \frac{3}{2} \mp \frac{3}{2} \frac{3\lambda^2 - 8/3}{\sqrt{9\lambda^4 - 16\lambda^2 + 16}} > 0 \quad (2.44)$$

より, $q_{\mp}(\lambda^2)$ はともに λ^2 の単調増加関数であることが分かる。

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda^2 \rightarrow \infty} q_-(\lambda^2) &= \lim_{\lambda^2 \rightarrow \infty} \frac{10\lambda^2}{2 + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\sqrt{9\lambda^4 - 16\lambda^2 + 16}} \\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}\quad (2.45)$$

となるので, $q_-(\lambda^2)$ の範囲は

$$0 < q_-(\lambda^2) < \frac{10}{3} \quad (2.46)$$

となり, $q_+(\lambda^2)$ の範囲は

$$q_+(\lambda^2) > 4 \quad (2.47)$$

となる。固有モード周波数 $\sqrt{q_-}\omega_0$ の ω_- モードの場合、(2.37)の ξ_- がその振動を示すが、 $q_+ > q_-$ 、 $q_+ > 4$ であるので x 方向と y 方向は同位相で振動するのに対して、 z 方向は反位相で振動することが分かる。固有モード周波数 $\sqrt{q_+}\omega_0$ の ω_+ モードの場合、(2.37)の ξ_+ がその振動を示すが、 $q_+ > q_-$ 、 $q_- < 4$ であるので x 方向と y 方向は同位相で振動し、同時に z 方向も同位相で振動する。この振動は凝縮体の膨張収縮運動である。固有モード周波数 $\sqrt{2}\omega_0$ の ω_2 モードの場合、(2.37)の ξ_2 がその振動を示し、 x 方向と y 方向は反位相で振動するが、 z 方向の振動は生じないことが分かる。

第3章 集団励起の周波数シフト

本章では非線形項を含めた BE 凝縮体の変形振動を調べる。変形振動は(2.35)の運動方程式によって記述され、2次と3次の非線形項は C 項つまり(2.39)(2.40)(2.41)である。非線形効果として、周波数シフト、モード結合、高調波発生などが考えられるが、ここでは周波数シフトを考える。

F. Dalfovo ら⁹⁾が考えたように、適当な駆動力によって、 ω_2 モードが励起されているとする。

$$\xi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t). \quad (3.1)$$

$A_2 \ll 1$ とすれば、他のモードとの結合は小さいので、 ω_{\mp} モードの振動は $O(A_2^2)$ である。(2.39)(2.40)(2.41)の A_2 の3次までの項を次に示す。

$$C^{(1)} = \omega_0^2 [\xi_2 \{ (q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+ \} + 4\xi_2(\xi_- + \xi_+) + 2\xi_2^2 - 2\xi_2^3], \quad (3.2)$$

$$C^{(2)} = \omega_0^2 [-\xi_2 \{ (q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+ \} - 4\xi_2(\xi_- + \xi_+) + 2\xi_2^2 + 2\xi_2^3], \quad (3.3)$$

$$C^{(3)} = \lambda^2 \omega_0^2 \xi_2^2. \quad (3.4)$$

ξ_- , ξ_+ , ξ_2 の運動方程式は(2.35)より

$$\frac{d^2 \xi_-}{dt^2} = -\omega_-^2 \xi_- + \frac{2(q_+ - 4) - \lambda^2}{q_+ - q_-} \omega_0^2 \xi_2^2, \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2 \xi_+}{dt^2} = -\omega_+^2 \xi_+ - \frac{2(q_- - 4) - \lambda^2}{q_+ - q_-} \omega_0^2 \xi_2^2, \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = -\omega_2^2 \xi_2 + \omega_0^2 (q_- \xi_- + q_+ \xi_+) \xi_2 - 2\omega_0^2 \xi_2^3 \quad (3.7)$$

となる。 q_{\pm} は(2.21)より関係式

$$q_{\pm}^2 - (4 + 3\lambda^2)q_{\pm} + 10\lambda^2 = 0 \quad (3.8)$$

を満足するので、この関係式を使うと(3.5)(3.6)は

$$\frac{d^2 \xi_-}{dt^2} = -\omega_-^2 \xi_- + 5\lambda^2 \frac{q_+ - 4}{q_+(q_+ - q_-)} \omega_0^2 \xi_2^2, \quad (3.9)$$

$$\frac{d^2 \xi_+}{dt^2} = -\omega_+^2 \xi_+ - 5\lambda^2 \frac{q_- - 4}{q_-(q_+ - q_-)} \omega_0^2 \xi_2^2 \quad (3.10)$$

となる。 ω_- , ω_+ モードは直接 ξ_2 によって駆動されていないが、(3.9)(3.10)の右辺の第2項の ξ_2 によって間接的に駆動される。 ξ_{\mp} を ξ_2 で表現するため、

$$\xi_{\mp}(t) = A_{\mp} \xi_2^2(t) + B_{\mp} \quad (3.11)$$

とおき、(3.9)(3.10)を使って A_{\mp} , B_{\mp} を求める。 ξ_{\mp} を t に関して1階、2階の微分を行うと、

$$\frac{d \xi_-}{dt} = 2A_- \xi_2 \frac{d \xi_2}{dt}, \quad (3.12)$$

$$\frac{d^2 \xi_-}{dt^2} = 2A_- \left(\frac{d \xi_2}{dt} \right)^2 + 2A_- \xi_2 \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} \quad (3.13)$$

となる。(3.1)を使って(3.9)へ代入すると、

$$\begin{aligned} & 2A_- (\omega_2 A_2 (-\sin \omega_2 t))^2 + 2A_- A_2 (\cos \omega_2 t) \\ & \omega_2^2 A_2 (-\cos \omega_2 t) \\ & = -\omega_-^2 \{ A_- (A_2 \cos \omega_2 t)^2 + B_- \} \\ & + 5\lambda^2 \frac{q_+ - 4}{q_+(q_+ - q_-)} \omega_0^2 (A_2 \cos \omega_2 t)^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる。 $\omega_2 = \sqrt{2}\omega_0$, $\omega_- = \sqrt{q_-}\omega_0$ を使って A_- , B_- を求めると、

$$A_- = -\frac{q_-}{2} \frac{q_+ - 4}{(q_+ - q_-)(q_- - 8)}, \quad (3.15)$$

$$B_- = -\frac{4}{q_-} A_- A_2^2 \quad (3.16)$$

となる。以上の結果より

$$\xi_- = \frac{q_+ - 4}{2(q_+ - q_-)(q_- - 8)} (q_- \xi_2^2 - 4A_2^2) \quad (3.17)$$

となり、同様にして

$$\xi_+ = -\frac{q_- - 4}{2(q_+ - q_-)(q_- - 8)} (q_+ \xi_2^2 - 4A_2^2) \quad (3.18)$$

となる。これらを(3.7)に代入すると、 ξ_2 に対する

非線形微分方程式が得られる。(3.7)の右辺は次となる。

$$\begin{aligned} & -\omega_0^2 \xi_2 [2 - (q_- \xi_- + q_+ \xi_+) + 2\xi_2^2] \\ & = -\omega_0^2 \xi_2 \left[2 + \frac{2}{(q_+ - q_-)} \left\{ \frac{q_+ - 4}{q_- - 8} q_- - \frac{q_- - 4}{q_+ - 8} q_+ \right\} A_2^2 \right. \\ & \quad \left. + 2 \left\{ -\frac{(q_+ - 4)q_-^2}{4(q_+ - q_-)(q_- - 8)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(q_- - 4)q_+^2}{4(q_+ - q_-)(q_+ - 8)} + 1 \right\} \xi_2^2 \right], \quad (3.19) \end{aligned}$$

ここで(3.8)より

$$q_+ + q_- = 4 + 3\lambda^2, \quad q_+ q_- = 10\lambda^2 \quad (3.20)$$

を使うと,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(q_+ - q_-)} \left\{ \frac{q_+ - 4}{q_- - 8} q_- - \frac{q_- - 4}{q_+ - 8} q_+ \right\} \\ & = -2 \frac{16 - 5\lambda^2}{16 - 7\lambda^2}, \quad (3.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{(q_+ - 4)q_-^2}{4(q_+ - q_-)(q_- - 8)} + \frac{(q_- - 4)q_+^2}{4(q_+ - q_-)(q_+ - 8)} \\ & = \frac{16 - 3\lambda^2}{16 - 7\lambda^2} \quad (3.22) \end{aligned}$$

となり, 最終的に ξ_2 に対する方程式は次となる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} & = -\omega_2^2 \left(1 - \frac{16 - 5\lambda^2}{16 - 7\lambda^2} A_2^2 \right) \xi_2 \\ & \quad - \omega_2^2 \left(1 + \frac{16 - 3\lambda^2}{16 - 7\lambda^2} \right) \xi_2^3. \quad (3.23) \end{aligned}$$

次に ω_- モードが駆動されている場合を考えて, ξ_- に対する方程式を求める。

$$\xi_-(t) = A_- \cos(\omega_- t) \quad (3.24)$$

とし, ω_+ モードの振動は $O(A_-^2)$ とし, ω_2 モードは寄与しないとする。(2.39) (2.40) (2.41) の A_- の3次までの項を次に示す。

$$\begin{aligned} C^{(1)} & = \omega_0^2 [6\xi_2^2 + 12\xi_- \xi_+ + (q_- - 4)^2 \xi_2^2 \\ & \quad + 2(q_- - 4)(q_+ - 4)\xi_- \xi_+ + 3\xi_- \{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\} \\ & \quad + 3(q_- - 4)\xi_+ \xi_- - 10\xi_-^3 - (q_- - 4)^3 \xi_-^3 \\ & \quad - 6(q_- - 4)\xi_-^3 - 3(q_- - 4)^2 \xi_-^3], \quad (3.25) \end{aligned}$$

$$C^{(2)} = C^{(1)}, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} C^{(3)} & = \lambda^2 \omega_0^2 [3\xi_2^2 + 6\xi_- \xi_+ + 3(q_- - 4)^2 \xi_2^2 \\ & \quad + 6(q_- - 4)(q_+ - 4)\xi_- \xi_+ + 4(q_- - 4)\xi_-^2 + 4(q_- - 4)\xi_- \xi_+ \\ & \quad + 4(q_+ - 4)\xi_+ \xi_- - 4\xi_-^3 - 4(q_- - 4)^3 \xi_-^3 \\ & \quad - 6(q_- - 4)\xi_-^3 - 6(q_- - 4)^2 \xi_-^3]. \quad (3.27) \end{aligned}$$

ξ_- の運動方程式は(2.35)より

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_-}{dt^2} & = -\omega_-^2 \xi_- \\ & \quad + \frac{q_+ - 4}{q_+ - q_-} \omega_0^2 [6\xi_2^2 + 12\xi_- \xi_+ + (q_- - 4)^2 \xi_2^2 \\ & \quad + 2(q_- - 4)(q_+ - 4)\xi_- \xi_+ + 3\xi_- \{(q_- - 4)\xi_- + (q_+ - 4)\xi_+\} \\ & \quad + 3(q_- - 4)\xi_+ \xi_- - 10\xi_-^3 - (q_- - 4)^3 \xi_-^3 \\ & \quad - 6(q_- - 4)\xi_-^3 - 3(q_- - 4)^2 \xi_-^3] \\ & \quad - \frac{1}{q_+ - q_-} \lambda^2 \omega_0^2 [3\xi_2^2 + 6\xi_- \xi_+ + 3(q_- - 4)^2 \xi_2^2 \\ & \quad + 6(q_- - 4)(q_+ - 4)\xi_- \xi_+ + 4(q_- - 4)\xi_-^2 + 4(q_- - 4)\xi_- \xi_+ \\ & \quad + 4(q_+ - 4)\xi_+ \xi_- - 4\xi_-^3 - 4(q_- - 4)^3 \xi_-^3 \\ & \quad - 6(q_- - 4)\xi_-^3 - 6(q_- - 4)^2 \xi_-^3] \quad (3.28) \end{aligned}$$

となる。 ξ_+ の運動方程式は $O(A_-^2)$ であることを考慮すると,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_+}{dt^2} & = -\omega_+^2 \xi_+ \\ & \quad - \frac{q_- - 4}{q_+ - q_-} \omega_0^2 [6\xi_2^2 + (q_- - 4)^2 \xi_2^2 + 3(q_- - 4)\xi_-^2] \\ & \quad + \frac{1}{q_+ - q_-} \lambda^2 \omega_0^2 [3\xi_2^2 + 3(q_- - 4)^2 \xi_2^2 + 4(q_- - 4)\xi_-^2] \quad (3.29) \end{aligned}$$

となる。右辺の第2, 第3項の ξ_- によって ω_+ モードが駆動されることが分かる。 ξ_+ を ξ_- で表現するため,

$$\xi_+(t) = A_+ \xi_-^2(t) + B_+ \quad (3.30)$$

とおき, (3.24) (3.30) を使って A_+, B_+ を求める。 ξ_+ の1階, 2階微分を行い, (3.24) を使って(3.29)へ代入すると次となる。

$$\begin{aligned} & 2A_+(A_- \omega_- (-\sin \omega_- t))^2 + 2A_+ A_- (\cos \omega_- t) \\ & \quad \omega_-^2 A_- (-\cos \omega_- t) \\ & = -\omega_+^2 \{A_+(A_- \cos \omega_- t)^2 + B_+\} \\ & \quad - \frac{q_- - 4}{q_+ - q_-} \omega_0^2 \{(q_- - 4)^2 + 3(q_- - 4) + 6\} (A_- \cos \omega_- t)^2 \\ & \quad + \frac{1}{q_+ - q_-} \lambda^2 \omega_0^2 \{3(q_- - 4)^2 + 4(q_- - 4) + 3\} (A_- \cos \omega_- t)^2. \quad (3.31) \end{aligned}$$

$\omega_+ = \sqrt{q_+} \omega_0$ を使って A_+, B_+ を求めると,

$$\begin{aligned} A_+ & = -\frac{q_- - 4}{(q_+ - 4q_-)(q_+ - q_-)} \{(q_- - 4)^2 + 3(q_- - 4) + 6\} \\ & \quad + \frac{\lambda^2}{(q_+ - 4q_-)(q_+ - q_-)} \{3(q_- - 4)^2 + 4(q_- - 4) + 3\}, \quad (3.32) \end{aligned}$$

$$B_+ = -\frac{2q_-}{q_+} A^2 A^+ \quad (3.33)$$

となる。(3.30) (3.33) を使って (3.28) より ξ_- の運動方程式を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_-}{dt^2} = & -\omega^2 \xi_- \\ & + \frac{q_+ - 4}{q_+ - q_-} \omega_0^2 \{ (q_- - 4)^2 + 3(q_- - 4) + 6 \} \xi_-^2 \\ & + \{ 2(q_- - 4)(q_+ - 4) + 3(q_+ - 4) + 3(q_- - 4) \\ & + 12 \} \xi_- \left(A_+ \xi_-^2 - \frac{2q_-}{q_+} A^2 A_+ \right) \\ & - \{ (q_- - 4)^3 + 3(q_- - 4)^2 + 6(q_- - 4) + 10 \} \xi_-^3 \\ & - \frac{1}{q_+ - q_-} \lambda^2 \omega_0^2 \{ 3(q_- - 4)^2 + 4(q_- - 4) + 3 \} \xi_-^2 \\ & + \{ 6(q_- - 4)(q_+ - 4) + 4(q_- - 4) + 4(q_+ - 4) \\ & + 6 \} \xi_- \left(A_+ \xi_-^2 - \frac{2q_-}{q_+} A^2 A_+ \right) \\ & - \{ 4(q_- - 4)^3 + 6(q_- - 4)^2 + 6(q_- - 4) + 4 \} \xi_-^3 \end{aligned} \quad (3.34)$$

となる。右辺を ξ_- の次数で整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_-}{dt^2} = & - \left[\omega^2 - \frac{q_+ - 4}{q_+ - q_-} \omega_0^2 \{ 2(q_- - 4)(q_+ - 4) \right. \\ & + 3(q_+ - 4) + 3(q_- - 4) + 12 \} \left. - \frac{2q_-}{q_+} A^2 A_+ \right] \xi_- \\ & + \frac{1}{q_+ - q_-} \lambda^2 \omega_0^2 \{ (6(q_- - 4)(q_+ - 4) \\ & + 4(q_- - 4) + 4(q_+ - 4) + 6) \left. - \frac{2q_-}{q_+} A^2 A_+ \right) \} \xi_-^2 \\ & + \left[\frac{q_+ - 4}{q_+ - q_-} \omega_0^2 \{ (q_- - 4)^2 + 3(q_- - 4) + 6 \} \right. \\ & - \frac{1}{q_+ - q_-} \lambda^2 \omega_0^2 \{ 3(q_- - 4)^2 + 4(q_- - 4) + 3 \} \left. \right] \xi_-^2 \\ & + \frac{q_+ - 4}{q_+ - q_-} \omega_0^2 \{ 2(q_- - 4)(q_+ - 4) + 3(q_+ - 4) \\ & + 3(q_- - 4) + 12 \} A_+ - \{ (q_- - 4)^3 + 3(q_- - 4)^2 \\ & + 6(q_- - 4) + 10 \} \} \xi_-^3 \\ & - \frac{1}{q_+ - q_-} \lambda^2 \omega_0^2 \{ 6(q_- - 4)(q_+ - 4) + 4(q_- - 4) \\ & + 4(q_+ - 4) + 6 \} A_+ - \{ 4(q_- - 4)^3 + 6(q_- - 4)^2 \\ & + 6(q_- - 4) + 4 \} \} \xi_-^3 \end{aligned} \quad (3.35)$$

となる。(3.20) を使って簡略化すると、

$$\frac{d^2 \xi_-}{dt^2} = -\omega^2 \left[1 - 5\lambda^2 \frac{(q_+ - 2)(q_- - 4)(q_- - 5)}{(4q_- - q_+)(q_+ - q_-)^2} A^2 \right] \xi_-$$

$$\begin{aligned} & + \frac{3}{2} \omega^2 \frac{q_- - 2\lambda^2 q_- + 9\lambda^2 - 8}{q_+ - q_-} \xi_-^2 \\ & - \frac{5}{2} \lambda^2 \omega^2 \frac{q_+}{q_-} \frac{(q_+ - 2)(q_- - 4)(q_- - 5)}{(4q_- - q_+)(q_+ - q_-)^2} \xi_-^3 \\ & - \frac{2}{5} \omega^2 \frac{q_- - 3}{q_+ - q_-} (-10\lambda^2 q_- - 37\lambda^2 + 11q_- - 54) \xi_-^3 \\ & - 6\omega^2 \frac{q_+ - 4}{q_-(q_+ - q_-)} \xi_-^3 \end{aligned} \quad (3.36)$$

となる。これは ξ_- に対する非線形微分方程式である。

次に (3.23) (3.36) に対応する非線形微分方程式を一般的に次のように書く。

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \Omega_0^2 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \gamma_3 \xi^3 = 0. \quad (3.37)$$

非線形振動論の一般論¹²⁾に従って、2次と3次の非線形項から生じる周波数シフトを求める。(3.37) をパラメータ μ を使って

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \Omega_0^2 \xi = \mu (-\gamma_2 \delta^2 - \gamma_3 \xi_3) \quad (3.38)$$

と書く。変数変換

$$\omega t = \tau, \quad \xi(t) = x(\tau) \quad (3.39)$$

を使って (3.38) を書くと、

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \Omega_0^2 x = \mu (-\gamma_2 x^2 - \gamma_3 x^3) \quad (3.40)$$

となる。ここで x と ω をパラメータ μ で展開する。

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots, \quad (3.41)$$

$$\omega = \Omega_0 + \mu \Omega_1 + \mu^2 \Omega_2 + \dots. \quad (3.42)$$

これを (3.40) に代入し、 μ^0 次、 μ^1 次、 μ^2 次を求める。

$$\Omega_0^2 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + \Omega_0^2 x_0 = 0, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \Omega_0^2 x_1 = & -2\Omega_0 \omega_1 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} - \gamma_2 x_0 - \gamma_3 x_0^3, \\ & (3.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \Omega_0^2 x_2 = & -2\Omega_0 \omega_1 \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} - (\omega_1^2 + 2\Omega_0 \omega_2) \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} \\ & - 2\gamma_0 x_0 x_1 - 3\gamma_3 x_0^2 x_1. \end{aligned} \quad (3.45)$$

(3.43) より $x_0(\tau)$ を求めると、

$$x_0(\tau) = A \cos \tau \quad (3.46)$$

となる。この結果を (3.44) の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned}
 & -2\Omega_0\omega_1\frac{d^2x_0}{d\tau^2}-\gamma_2x_0^2-\gamma_3x_0^3 \\
 & =2\Omega_0\omega_1A\cos\tau-\gamma_2A^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\tau\right) \\
 & \quad -\gamma_3A^3\left(\frac{3}{4}\cos\tau+\frac{1}{4}\cos 3\tau\right) \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

となる。 $\cos\tau$ の係数をゼロとおき、

$$\omega_1=\frac{3}{8}\frac{\gamma_3}{\Omega_0}A^2 \quad (3.48)$$

を得る。微分方程式とその一般解は

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+x_1=\gamma(\tau), \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
 x_1(\tau) & =C_{10}\sin\tau+C_{20}\cos\tau \\
 & \quad +\sin\tau\int r(\tau)\cos\tau d\tau+\cos\tau\int r(\tau)\sin\tau d\tau \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

となるので、(3.44)の右辺を $\Omega_0^2r(\tau)$ とおき、 $x_1(\tau)$ の初期値を $x_1(0)=A_1$ 、 $dx_1/d\tau|_{\tau=0}=0$ とすると、 $x_1(\tau)$ は次となる。

$$\begin{aligned}
 x_1(\tau) & =A_1-\left(\frac{\omega_1A}{\Omega_0}-\frac{\gamma_2A^2}{3\Omega_0^2}-\frac{\gamma_3A^3}{4\Omega_0^2}\right)\cos\tau \\
 & \quad +\left[\frac{2\omega_1A}{\Omega_0}\left(\frac{1}{4}\sin 2\tau+\frac{\tau}{2}\right)-\frac{\gamma_2A^2}{\Omega_0^2}\left(\frac{1}{12}\sin 3\tau+\frac{3}{4}\sin\tau\right)\right. \\
 & \quad \left.-\frac{\gamma_3A^3}{\Omega_0^2}\left(\frac{1}{32}\sin 4\tau+\frac{1}{4}\sin 2\tau+\frac{3}{8}\tau\right)\right]\sin\tau \\
 & \quad +\left[\frac{\omega_1A}{\Omega_0}\cos^2\tau-\frac{\gamma_2A^2}{3\Omega_0^2}\cos^3\tau-\frac{\gamma_3A^3}{4\Omega_0^2}\cos^4\tau\right]\cos\tau. \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

(3.46) (3.51)を(3.45)の右辺に代入し、 $\cos\tau$ の係数をゼロとおくと、

$$\omega_2=-\frac{5}{12}\frac{\gamma_2^2A^2}{\Omega_0^3} \quad (3.52)$$

を得る。以上の結果を(3.42)へ代入し、 $\mu=1$ とおくと、

$$\omega=\Omega_0\left(1-\frac{5}{12}\frac{\gamma_2^2A^2}{\Omega_0^4}+\frac{3}{8}\frac{\gamma_3A^2}{\Omega_0^2}\right) \quad (3.53)$$

となり、非線形項から生じる周波数シフトが求まる。

$$\omega=\bar{\omega}(1+\delta(\lambda)A^2). \quad (3.54)$$

ここで $\bar{\omega}$ は ω_2 モードの場合は ω_2 、 ω_- モードの場合は ω_- である。先に求めた ω_2 モードの場合は(3.23)より

$$\Omega_0^2=\omega_2^2\left(1-\frac{16-5\lambda^2}{16-7\lambda^2}A_2^2\right), \quad (3.55)$$

$$\gamma_2=0, \quad (3.56)$$

$$\gamma_3=\omega_2^2\left(1+\frac{16-3\lambda^2}{16-7\lambda^2}\right) \quad (3.57)$$

となるので、周波数シフト $\delta_2(\lambda)$ は(3.53)より

$$\delta_2(\lambda)=\frac{16-5\lambda^2}{4(16-7\lambda^2)} \quad (3.58)$$

となる。 ω_- モードの場合は(3.36)より

$$\Omega_0^2=\omega_-^2\left[1-5\lambda^2\frac{(q_+-2)(q_--4)(q_--5)}{(4q_--q_+)(q_+-q_-)^2}A^2\right], \quad (3.59)$$

$$\gamma_2=-\frac{3}{2}\omega_-^2\frac{q_--2\lambda^2q_--9\lambda^2-8}{q_+-q_-}, \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 & =\frac{5}{2}\lambda^2\omega_-^2\frac{q_+}{q_-}\frac{(q_+-2)(q_--4)(q_--5)}{(4q_--q_+)(q_+-q_-)^2} \\
 & \quad +\frac{2}{5}\omega_-^2\frac{q_--3}{q_+-q_-}(-10\lambda^2q_--37\lambda^2+11q_--54) \\
 & \quad +6\omega_-^2\frac{q_+-4}{q_-(q_+-q_-)} \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

となるので、周波数シフト $\delta_-(\lambda)$ は(3.53)より

$$\begin{aligned}
 \delta_-(\lambda) & =\frac{5}{2}\lambda^2\frac{(q_+-2)(q_--4)(q_--5)}{(4q_--q_+)(q_+-q_-)^2}\left(-1+\frac{15}{4}\frac{\lambda^2}{q_-^2}\right) \\
 & \quad -\frac{15}{16}\frac{1}{(q_+-q_-)^2}(q_--2\lambda^2q_--9\lambda^2-8)^2 \\
 & \quad -\frac{3}{20}\frac{q_--3}{q_+-q_-}(-10\lambda^2q_--37\lambda^2+11q_--54) \\
 & \quad -\frac{9}{4}\frac{q_+-4}{q_-(q_+-q_-)} \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

となる。

第4章 トラップ BE 凝縮体の変形振動の数値計算結果

本章では b_x 、 b_y 、 b_z に対する運動方程式を数値計算し、トラップ BE 凝縮体の変形振動を調べる。閉じ込めポテンシャル周波数を変化させることにより、 b_x 、 b_y 、 b_z の振動を駆動する。その場合の運動方程式は次となる。

$$\frac{d^2b_i}{dt^2}+\omega_{0i}^2(1+2f_i(t))b_i=\omega_{0i}^2\frac{1}{b_ib_xb_yb_z}. \quad (4.1)$$

ここで $i=x, y, z$ であり、 $\omega_{0x}=\omega_{0y}=\omega_0$ 、 $\omega_{0z}=\lambda\omega_0$ とする。 $f_i(t)$ は Dalfovo ら⁹⁾のように

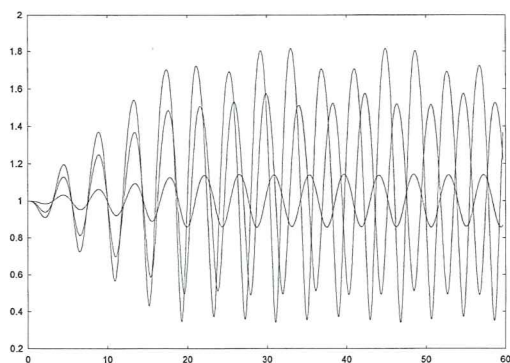


図 4-1(a) $b_x(t)$ の時間変化 ($\lambda=0$ の場合)
 b_x の小さい順に $\eta=0.01, 0.04, 0.06$ である。

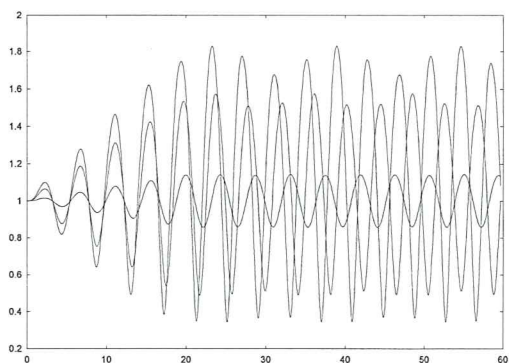


図 4-1(b) $b_y(t)$ の時間変化 ($\lambda=0$ の場合)
 b_y の小さい順に $\eta=0.01, 0.04, 0.06$ である。

$$f_x(t) = \eta \sin(\sqrt{2}\omega_0 t), \quad (4.2)$$

$$f_y(t) = -\eta \sin(\sqrt{2}\omega_0 t), \quad (4.3)$$

$$f_z(t) = 0 \quad (4.4)$$

とおき、 ω_2 モードを駆動する。この駆動は $t=20\omega_0^{-1}$ で打ち切られるとし、後の時刻では自由振動を行うとする。以下、図の時間の単位は ω_0^{-1} とする。

図 4-1、図 4-2 は非等方性パラメータが $\lambda=0$ である軸方向に非常に長いトラップの場合の結果である。この場合は $b_z=1$ (一定) であり、 b_x と b_y が平衡値 1 のまわりで反位相で振動する。 η が増加すると、高周波側に周波数シフトが生じる

ことが分かる。 $\lambda=0$ の時、(2.23) より $q_-=0, q_+=4$ となり、 $\omega_-=0, \omega_+=2\omega_0$ となる。 $\lambda \ll 1$ とすると、 $q_=(5/2)\lambda^2$ であり、 $\omega_-=\sqrt{5/2}\omega_z$ となる。(2.37) を使うと、

$$\xi_- = 0, \quad (4.5)$$

$$\xi_+ = \frac{1}{2}\delta b_x + \frac{1}{2}\delta b_y, \quad (4.6)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}b_x - \frac{1}{2}\delta b_y \quad (4.7)$$

であり、 ξ_2 は δb_x と δb_y の反位相振動を示す ω_2 モードを表わす変数である。図 4-2 は ω_- モードは生じないが、モード結合により ω_+ モードが

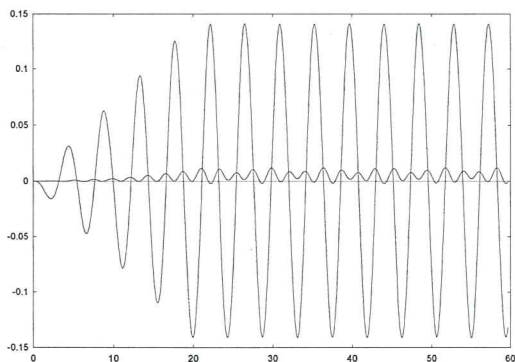


図 4-2(a) $\xi_2(t), \xi_+(t)$ の時間変化
($\lambda=0, \eta=0.01$ の場合)
図は大きい順に ξ_2, ξ_+ である。

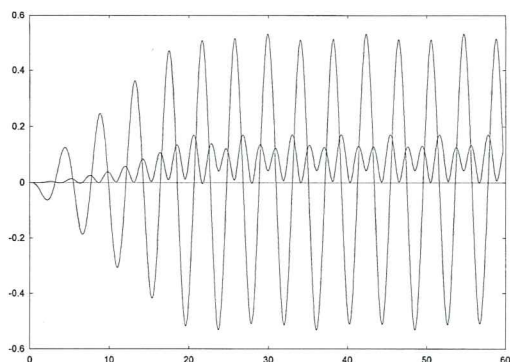


図 4-2(b) $\xi_2(t), \xi_+(t)$ の時間変化
($\lambda=0, \eta=0.04$ の場合)
図は大きい順に ξ_2, ξ_+ である。

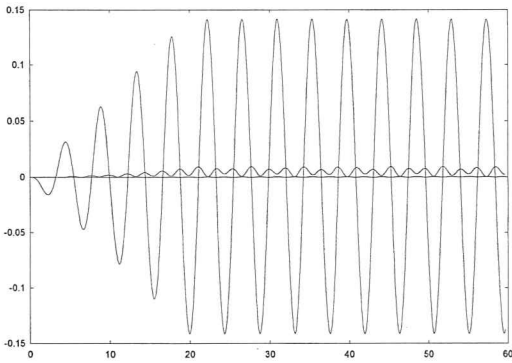


図 4-3 (a) $\xi_2(t), \xi_-(t), \xi_+(t)$ の時間変化
($\lambda=\sqrt{8}, \eta=0.01$ の場合)
図は大きい順に ξ_2, ξ_-, ξ_+ である。

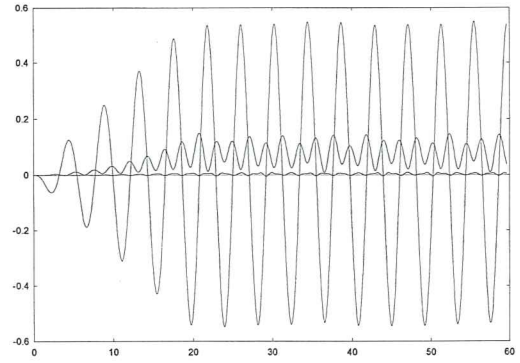


図 4-3 (b) $\xi_2(t), \xi_-(t), \xi_+(t)$ の時間変化
($\lambda=\sqrt{8}, \eta=0.04$ の場合)
図は大きい順に ξ_2, ξ_-, ξ_+ である。

生じることを示している。

図 4-3 は Jin らが実験で観測した $\lambda=\sqrt{8}$ の場合の結果である。 $\lambda=\sqrt{8}$ の時、 $q_+=14 \pm 2\sqrt{29}$ ($q_+ \approx 24.77, q_- \approx 3.230$) となり、 $\omega_+ \approx 4.98\omega_0, \omega_- \approx 1.80\omega_0$ である。 $\lambda=0$ の場合と比べて ω_+ モードが ω_- モードに置きかわっている点を除いてほとんど同じふるまいを示す。

図 4-4 は等方トラップ ($\lambda=1$) の場合の結果である。この時は $q_+=5, q_-=2$ であり、 $\omega_+=\sqrt{5}\omega_0, \omega_-=\sqrt{2}\omega_0$ である。図 4-4 (b) の $\eta=0.04$ の場合は ω_2 モードの振幅がゆるやかに減少すると同時に ω_- モードは増加し、共振傾向を示している。

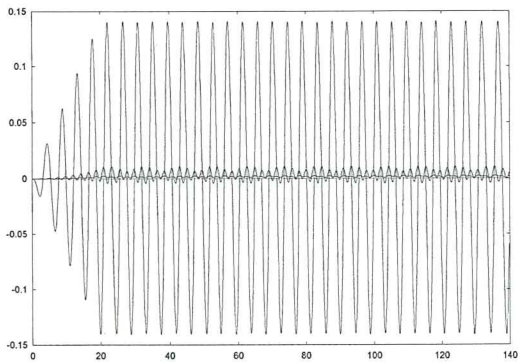


図 4-4 (a) $\xi_2(t), \xi_-(t), \xi_+(t)$ の時間変化
($\lambda=1, \eta=0.01$ の場合)
図は大きい順に ξ_2, ξ_-, ξ_+ である。

非線形効果の高まりは駆動振幅の大きさ η を増加するだけでなく、トラップの非等方性パラメータを変えることによっても得られる。この点は $\delta_2(\lambda)$ の分母が 0 となる $\lambda=\sqrt{16/7}$ の場合顕著となる。 $\lambda=\sqrt{16/7}$ の時、 $q_+=8, q_-=20/7$ となり、 $\omega_+ \approx 2.83\omega_0, \omega_- \approx 1.69\omega_0$ である。図 4-5 は $\omega_+=2\omega_2$ の関係が満足されるため ω_2 モードと ω_+ モードが共振していることを示している。

今までは ω_2 モードを駆動した場合を考えたが、次に ω_- モードを駆動する場合を考える。この場合は $f_i(t)$ は次で与えられる。

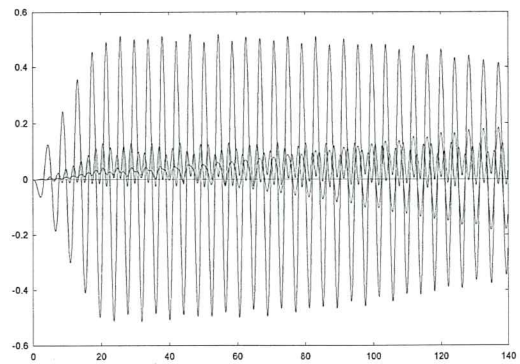


図 4-4 (b) $\xi_2(t), \xi_-(t), \xi_+(t)$ の時間変化
($\lambda=1, \eta=0.04$ の場合)
図は $t < 20\omega_0^{-1}$ のとき、大きい順に ξ_2, ξ_+, ξ_- である。ただし ξ_- は増加し、 $t > 80\omega_0^{-1}$ では $\xi_- > \xi_+$ となる。

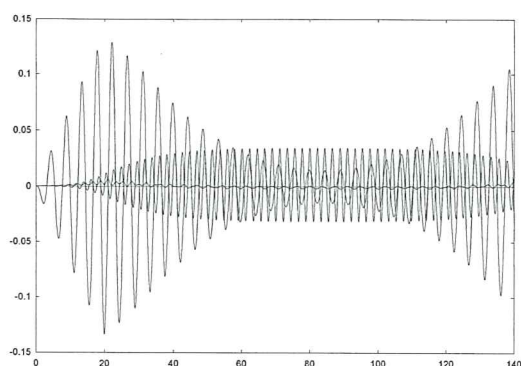


図 4-5 $\xi_2(t), \xi_-(t), \xi_+(t)$ の時間変化
($\lambda=\sqrt{16/7}, \eta=0.01$ の場合)
図は大きい順に ξ_2, ξ_+, ξ_- である。

$$f_x(t) = \eta \sin(\sqrt{q_-} \omega_0 t), \quad (4.8)$$

$$f_y(t) = \eta \sin(\sqrt{q_-} \omega_0 t), \quad (4.9)$$

$$f_z(t) = \eta(q_- - 4) \sin(\sqrt{q_-} \omega_0 t). \quad (4.10)$$

前と同様に、この駆動は $t=20\omega_0^{-1}$ で打ち切られるとする。図の時間の単位も前と同様に ω_0^{-1} とする。

図 4-6, 図 4-7, 図 4-8 は等方トラップ $\lambda=1$ の場合と $\lambda=\sqrt{8}$ の場合の結果である。この場合は $b_x=b_y$ が成立し、 b_x と b_z は反位相で振動する。(2.37) を使うと、

$$\xi_- = \frac{1}{6} \delta b_x + \frac{1}{6} \delta b_y - \frac{1}{3} \delta b_z, \quad (4.11)$$

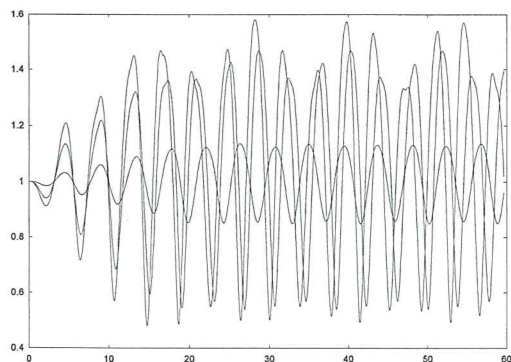


図 4-6(a) $b_x(t)$ の時間変化 ($\lambda=1$ の場合)
 b_x の小さい順に $\eta=0.01, 0.04, 0.06$ である。

$$\xi_+ = \frac{1}{3} \delta b_x + \frac{1}{3} \delta b_y + \frac{1}{3} \delta b_z, \quad (4.12)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \delta b_x - \frac{1}{2} \delta b_y \quad (4.13)$$

となり、 $\delta b_x = \delta b_y$ のため ω_2 モードは存在しない。 η が増加すると、モード周波数は $\lambda=1, \sqrt{8}$ 両方とも高周波側にシフトする。

周波数シフト $\delta_-(\lambda)$ の分母が 0 となる $4q_- = q_+$ の場合を考える。(2.23) を使ってその時の λ の値を求めると $\lambda = ((77 \pm 5\sqrt{145})/36)^{1/2}$ であり、大きい方の λ の値は $\lambda \approx 1.9521$ となる。この時、 $q_+ \approx 12.35$, $q_- \approx 3.09$, $\omega_+ \approx 3.51\omega_0$, $\omega_- \approx 1.76\omega_0$ である。図 4-9 は図 4-5 の場合と同様に、 ω_- モードと ω_+ モードが共鳴していることを示している。これは ω_+ モード周波数が ω_- モードの第 2 高調波の周波数に等しい $\omega_+ = 2\omega_-$ の関係が満足されるからである。

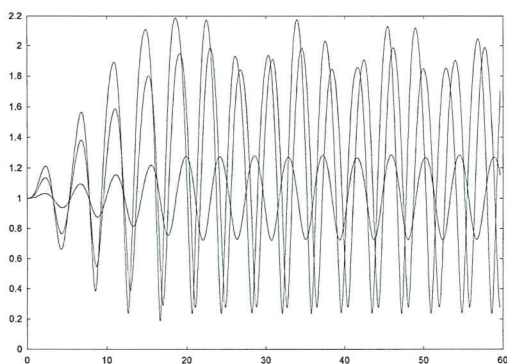


図 4-6(b) $b_z(t)$ の時間変化 ($\lambda=1$ の場合)
 b_z の小さい順に $\eta=0.01, 0.04, 0.06$ である。

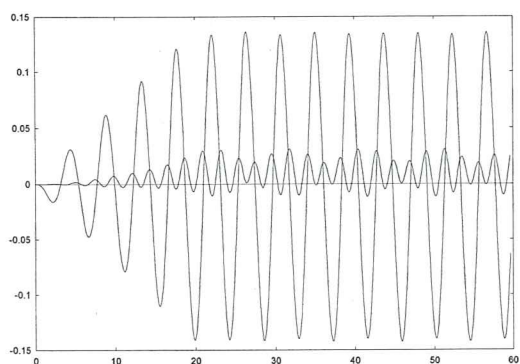


図 4-7 (a) $\xi_-(t), \xi_+(t)$ の時間変化
($\lambda=1, \eta=0.01$ の場合)
図は大きい順に ξ_-, ξ_+ である。

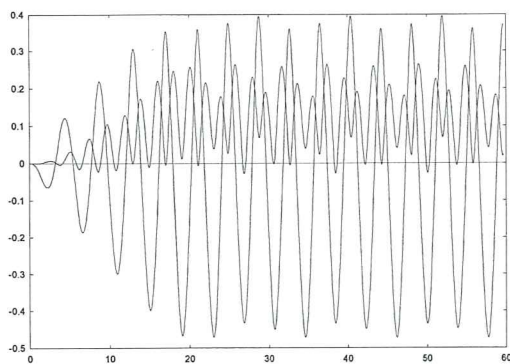


図 4-7 (b) $\xi_-(t), \xi_+(t)$ の時間変化
($\lambda=1, \eta=0.04$ の場合)
図は大きい順に ξ_-, ξ_+ である。

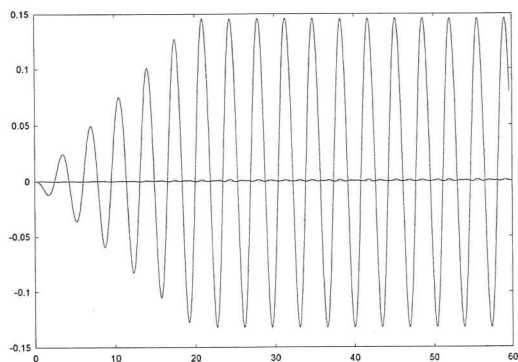


図 4-8 (a) $\xi_-(t), \xi_+(t)$ の時間変化
($\lambda=\sqrt{8}, \eta=0.01$ の場合)
図は大きい順に ξ_-, ξ_+ である。

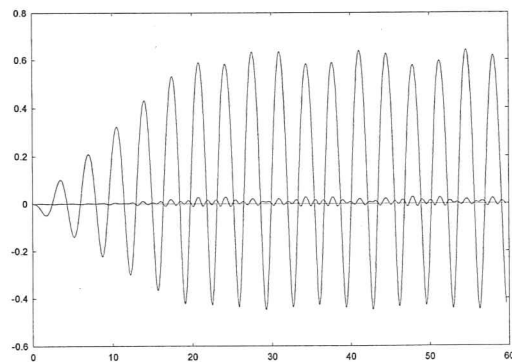


図 4-8 (b) $\xi_-(t), \xi_+(t)$ の時間変化
($\lambda=\sqrt{8}, \eta=0.04$ の場合)
図は大きい順に ξ_-, ξ_+ である。

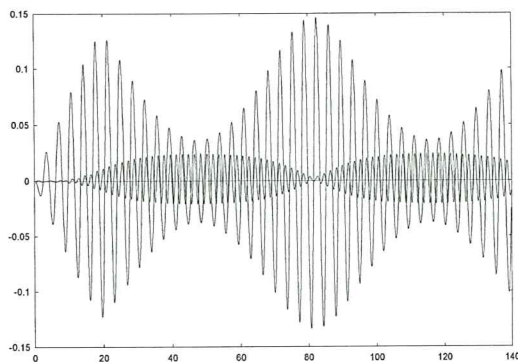


図 4-9 $\xi_-(t), \xi_+(t)$ の時間変化
($\lambda=((77+5\sqrt{145})/36)^{1/2}, \eta=0.01$ の場合)
図は大きい順に ξ_-, ξ_+ である。

第5章 結 論

本論文では軸対称3次元調和振動子型閉じ込めポテンシャル中のBE凝縮体の集団励起を振幅が大きく非線形効果が重要となる場合について解析計算と数値計算を使って調べた。

第2章ではBE凝縮体に対するGP方程式を基礎に、凝縮体の変形振動を調べるため、スケールパラメータ b_i を導入し、 b_i に対する運動方程式を求めた。平衡値のまわりの振動の非線形効果を求めるため、平衡値からのずれ δb_i の3次までの非線形項を含む方程式を導出した。軸対称3次元閉じ込めポテンシャルの場合、線形項のみを考えると固有周波数 ω_- , ω_+ , ω_2 の3つの振動モードが存在する。各振動モードに対する振幅を ξ_- , ξ_+ , ξ_2 とし、これらの量に対する非線形項を含む運動方程式を導いた。

第3章では ω_2 モードと ω_- モードを駆使した場合、モード間結合を考慮し、振幅 ξ_2 , ξ_- に対する非線形運動方程式を求めた。この方程式より非線形振動の一般論を使って、非線形項から生じる周波数シフトを得た。 ω_2 モードの場合の周波数シフト $\delta_2(\lambda)$ は(3.58), ω_- モードの周波数シフト $\delta_-(\lambda)$ は(3.62)となり、Dalfovo ら⁹⁾の結果と一致した。 $\delta_2(\lambda)$ は $\lambda = \sqrt{16/7}$, $\delta_-(\lambda)$ は $\lambda = ((77 \pm 5\sqrt{145})/36)^{1/2}$ で発散する。(3.54)の結果は $|\delta(\lambda)| A^2 \ll 1$ の場合正しいが、 $\delta(\lambda)$ が発散する λ の近傍は除外しなければならない。第4章の結果と比較するため、 $\lambda=0, 1, \sqrt{8}$ の場合の $\delta_2(\lambda)$ の値を求めると、 $\delta_2(0)=1/4$, $\delta_2(1)=11/36$, $\delta_2(\sqrt{8})=3/20$ となり、いずれも正でありモード周波数は高周波側にシフトすることが分かる。同様に $\lambda=1, \sqrt{8}$ の場合の $\delta_-(\lambda)$ の値を求めると、 $\delta_-(1)=11/12$, $\delta_-(\sqrt{8})=1.636 \times 10^{-3}$ となる。 $\delta_2(\sqrt{8})$ が非常に小さいため、 $\lambda=\sqrt{8}$ の場合は周波数シフトを生じないことを示す。

第4章では数値計算によりBE凝縮体の変形振動を調べた。 ω_2 モード駆動の場合、いずれの場合

も ω_2 モード周波数は駆動振幅 η の増加とともに高周波側にシフトし、第3章の結果と一致する。 ω_- モード駆動の場合も同じく高周波側にシフトする。 $\lambda=\sqrt{8}$ の場合は第3章の結果と矛盾しているが、第3章では周波数シフトを A^2 の項まで求めたからであり、 A^2 の係数 $\delta_-(\lambda)$ が非常に小さいとしても A^3 以上の項からの寄与により周波数シフトが生じたと考えられる。数値計算結果のもう一つの特徴は、 ω_2 モード駆動の場合 $\lambda=\sqrt{16/7}$ で ω_2 モードと ω_+ モードの間で共鳴が生じ、 ω_- モード駆動の場合は $\lambda=((77+5\sqrt{145})/36)^{1/2}$ で ω_- モードと ω_+ モードの間で共鳴が生じることである。これは非線形効果で生じた高調波がそれぞれ共振条件 $\omega_+=2\omega_2$, $\omega_+=2\omega_-$ を満たしたからである。ここでは非線形効果の中で特に周波数シフトに注目したが、これ以外の様々な非線形効果についても今後研究を進めたいと考える。

BE凝縮体の集団励起の実験では、低エネルギーモード周波数の他にモード周波数と減衰割合の温度依存性が測定されている。現在、モード周波数の測定結果は非常に正確である。Stamper-Kurn ら¹³⁾は 1.5×10^7 個のトラップ²³Na原子の集団励起を測定した。²³Na原子の散乱長 a は2.75 nm であり、軸対称閉じ込めポテンシャルのトラップ周波数は $\omega_0/2\pi=230(\text{Hz})$, $\omega_z/2\pi=16.93(\text{Hz})$ であった。この場合 $\lambda \approx 0.074$ であり、測定されたモード周波数は $\omega_- = 1.569\omega_z$ で、その測定誤差は0.25%であった。この場合の平均場理論の結果は(2.22)より $\omega_- = 1.5806\omega_z$ となる。Braaten と Pearson¹⁴⁾は平均場のまわりの量子ゆらぎの効果を考慮して、平均場理論の1次補正を行ったが、この不一致は改善されない。かれらは平均場理論からのずれを説明するために、BE凝縮体の表面近くでのThomas-Fermi近似の破れから生じるエッジ効果、本論文で検討した非線形効果、有限温度効果を考慮する必要があると指摘している。量子ゆらぎ効果を考えて平均場理論を越える研究はPitaevskii と Stringari¹⁵⁾によっても行われている。

Pitaevskii¹⁶⁾は非線形効果によるモード周波数の振幅依存性により、集団励起の崩壊と回復の現象が生じる可能性があるとして指摘した。これは集団励起モードが定常振動状態のコヒーレントな重ね合わせ状態であるとし、定常振動間の dephasing により集団励起の崩壊が生じるという考えである。この現象は量子光学分野における Cummings 崩壊¹⁷⁾のアナロジーである。このようにトラップ BE 凝縮体の集団励起の研究は、より精密な理論が必要されているとともに、マクロな量子系のコヒーレンスの研究を進める上でも重要な材料を提供している。

参考文献

- 1) M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995)
- 2) C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett, and R.G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995)
- 3) K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N. J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995)
- 4) D.S. Jin, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 420 (1996)
- 5) M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.C. Townsend, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 988 (1996)
- 6) M. Edwards, P.A. Ruprecht, K. Burnett, R.J. Dodd, C.W. Clark, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1671 (1996)
- 7) B.D. Esry and C.H. Greene, *Bull. Am. Phys. Soc.* **41**, 1137 (1996)
- 8) S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2360 (1996)
- 9) F. Dalfovo, C. Minniti, and L.P. Pitaevskii, *Phys. Rev. A* **56**, 4855 (1997)
- 10) Yu. Kagan, E.L. Surkov, and G.V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **54**, R1753 (1996)
Y. Casin and R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996)
- 11) M. Ohya, the Bulletin of Nagasaki Institute of Applied Science, **38**, 185 (1998)
- 12) 古屋茂, 南雲仁一, 非線型振動論 (岩波講座現代応用数学 岩波書店 1957)
- 13) D.M. Stamper-Kurn et al., cond-mat/9801262
- 14) E. Braaten and J. Pearson, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 255 (1999)
- 15) L.P. Pitaevskii and S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4541 (1998)
- 16) L.P. Pitaevskii, *Phys. Lett. A* **229**, 406 (1997)
- 17) F.W. Cummings, *Phys. Rev.* **140**, A1051 (1965)
N.B. Narozhny, J.J. Sanchez-Mondragon, and J.H. Eberly, *Phys. Rev. A* **23**, 236 (1981)